Liste di Liste
Matrici

Una lista annidata è una lista che compare come elemento di un'altra lista. Nell'esempio seguente il quarto elemento della lista (elemento numero 3 dato che il primo ha indice 0) è una lista:

```
>>> Lista = ["ciao", 2.0, 5, [10, 20]]
```

Se stampiamo Lista[3] otteniamo [10, 20]. Per estrarre un elemento da una lista annidata possiamo procedere in due tempi:

```
>>> Elemento = Lista[3]
>>> Elemento[0]
10
```

O possiamo combinare i due passi in un'unica istruzione:

```
>>> Lista[3][0]
10
```

L'operatore viene valutato da sinistra verso destra così questa espressione ricava il quarto elemento (indice 3) di Lista ed essendo questo una lista ne estrae il primo elemento (indice 0).

Excursus Matematico – Le Matrici

- In matematica, una **matrice** è uno schieramento rettangolare di oggetti; le matrici di maggiore interesse sono costituite da numeri appartenenti ad un campo.
- Le matrici servono principalmente a descrivere valori che dipendono da due parametri, e per questo motivo sono ampiamente usate in matematica e in tutte le scienze.

3	7	10	0
1	3	11	2
5	8	9	24

Excursus Matematico – Le Matrici

- Le righe orizzontali di una matrice sono chiamate **righe**, mentre quelle verticali sono le **colonne**. Ad esempio, la matrice mostrata sopra ha due righe e tre colonne. In generale, una **matrice** è una matrice con *m* righe e *n* colonne, dove *m* e *n* sono interi positivi fissati. Una matrice generica è descritta solitamente indicando con a_{ij} l'*elemento* posizionato alla riga *i*-esima e alla colonna *j*-esima.
- I vettori possono essere considerati matrici molto semplici, aventi una sola riga o una sola colonna. Più precisamente, una matrice con una sola riga, di dimensione , è detta **vettore riga**, mentre una matrice con una sola colonna, di dimensione , è detta **vettore colonna**.

Excursus Matematico – Le Matrici

- Qui sotto sono mostrati in ordine una matrice, un vettore colonna ed un vettore riga

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4.5 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & \frac{7}{2} & -9 \end{bmatrix}$$

- Se la matrice si chiama A
  - L'elemento posizionato nella riga i e nella colonna j può essere indicato in vari modi: ad esempio come $A_{i,j}$, o tramite parentesi quadre $A[i,j]$. Si usa talvolta la notazione $A = (a_{i,j})$ per indicare che A è una matrice e che i suoi elementi sono denotati con $a_{i,j}$.
  - Gli elementi con i due indici di riga e di colonna uguali, cioè gli elementi della forma $A_{i,i}$ costituiscono la **diagonale principale** della matrice.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Excursus Matematico – Le Matrici

Somma

- Due matrici *A* e *B* possono essere sommate se hanno le stesse dimensioni.
- La loro somma *A* + *B* è definita come la matrice i cui elementi sono ottenuti sommando i corrispettivi elementi di *A* e *B*. Formalmente:

  $(A + B)_{i,j} := A_{i,j} + B_{i,j}$

  Per esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Excursus Matematico – Le Matrici

- La **moltiplicazione per uno scalare** è un'operazione che, data una matrice *A* ed un numero *c* (detto *scalare*), costruisce una nuova matrice *cA*, il cui elemento è ottenuto moltiplicando l'elemento corrispondente di *A* per *c*

  $(cA)_{ij}: = cA_{i,j}$. Per esempio:

$$2\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3\\ 2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\ 8 & -4 & 10\end{bmatrix}.$$

Excursus Matematico – Le Matrici

Prodotto riga per colonna

- La moltiplicazione tra due matrici *A* e *B* è un'operazione più complicata delle precedenti. A differenza della somma, non è definita sommando semplicemente gli elementi aventi lo stesso posto
  - La definizione di moltiplicazione che segue è motivata dal fatto che una matrice modellizza una applicazione lineare, e in questo modo il prodotto di matrici corrisponde alla composizione di applicazioni lineari
- La moltiplicazione è definita soltanto se il numero di righe di *B* coincide con il numero *n* di colonne di *A*. Il risultato è una matrice con lo stesso numero di righe di A e lo stesso numero di colonne di B
- L’elemento di posizione (*i*,*j*) è dato dalla somma

$$C_{i,j} := A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,n}B_{n,j}.$$

Excursus Matematico – Le Matrici

Per esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

Moltiplicando una matrice 2×3 per una 3×3 si ottiene una matrice 2×3.

1° riga:

$$C_{11} = [(1 \times 1) + (1 \times 2) + (2 \times 0)] = 3$$
$$C_{12} = [(1 \times 1) + (1 \times 5) + (2 \times -2)] = 2$$
$$C_{13} = [(1 \times 1) + (1 \times 1) + (2 \times 1)] = 4$$

2° riga:

$$C_{21} = [(0 \times 1) + (1 \times 2) + (-3 \times 0)] = 2$$
$$C_{22} = [(0 \times 1) + (1 \times 5) + (-3 \times -2)] = 11$$
$$C_{23} = [(0 \times 1) + (1 \times 1) + (-3 \times 1)] = -2$$

Risultato 2×3:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Excursus Matematico – Le Matrici

Matrici quadrate

- Una matrice si dice quadrata se ha lo stesso numero di righe e colonne.
- Una matrice quadrata ha una diagonale principale, quella formata da tutti gli elementi $a_{i,i}$ con indici uguali. La somma di questi elementi è chiamata traccia. L'**operazione di trasposizione** trasforma una matrice quadrata A nella matrice A^t ottenuta scambiando ogni $a_{i,j}$ con $a_{j,i}$, in altre parole ribaltando la matrice intorno alla sua diagonale principale.
- Una matrice tale che $a_{i,j} = a_{j,i}$ è una matrice **simmetrica**. In altre parole, A è simmetrica se $A = A^t$. Se tutti gli elementi che non stanno nella diagonale principale sono nulli, la matrice è detta diagonale.

Le liste annidate sono spesso usate per rappresentare matrici. Per esempio la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ può essere rappresentata come

```
>>> Matrice = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]
```

lista di tre elementi dove ciascuno è una riga della matrice.

```
>>> Matrice[1]
[4, 5, 6]
```

O estrarre una singola cella usando il doppio indice:

```
>>> Matrice[1][1]
5
```

Il primo indice seleziona la riga ed il secondo la colonna.

Riempire una matrice di 0 e visualizzare la matrice

```
numerorighe=3
numerocolonne=4
m=[] #lista vuota
for i in range(numerorighe):
    n=[]
    for j in range(numerocolonne):
        n.append(0)
    m.append(n)
print("m: ", m)
```

Con numeri inseriti dall’utente

```
numerorighe=3
numerocolonne=4
m=[]
for i in range(numerorighe):
    n=[]
    for j in range(numerocolonne):
        x=int(input("Inserire elemento ("+str(i)+","+str(j)+")\n"))
        n.append(x)
    m.append(n)
print("m: ", m)
```

```
dimensione=4
m=[[1,2,3,4],[2,3,5,0],[3,5,6,8],[4,0,8,0]]
simmetrica="Simmetrica"
for i in range(dimensione):
    for j in range(dimensione):
        if m[i][j]!=m[j][i]:
            simmetrica="Non simmetrica"
for i in range(dimensione):
    print(str(m[i]))
print(simmetrica)
```

```
dimensione=4
m=[[1,7,3,4],[2,3,5,0],[3,5,6,8],[4,0,8,0]]
simmetrica="Simmetrica"
for i in range(dimensione):
    for j in range(dimensione):
        if m[i][j]!=m[j][i]:
            simmetrica="Non simmetrica"
for i in range(dimensione):
    print(str(m[i]))
print(simmetrica)
```

è corretto?
si può migliorare?

```
dimensione=4
m=[[1,7,3,4],[2,3,5,0],[3,5,6,8],[4,0,8,0]]
simmetrica="Simmetrica"
for i in range(dimensione):
    for j in range(i):
        if m[i][j]!=m[j][i]:
            simmetrica="Non simmetrica"
for i in range(dimensione):
    print(str(m[i]))
print(simmetrica)
```

Ora?

Esercizi su Matrici

Somma di matrici

c[i][j] = a[i][j] + b[i][j]

	0	1	2	3
0	**3**	**7**	**10**	**0**
1	**1**	**3**	**11**	**2**
2	**5**	**8**	**9**	**24**

+

0	**2**	**1**	**0**	**5**
1	**7**	**9**	**6**	**2**
2	**5**	**1**	**2**	**4**

=

0	**5**	**8**	**10**	**5**
1	**8**	**12**	**17**	**4**
2	**10**	**9**	**11**	**28**

Esercizio

- Scrivere un programma che chiede all’utente di riempire una matrice, la stampa, cerca, se esiste, la prima occorrenza dello 0 e dice in che posizione è stata trovata

Esercizio

- Scrivere un programma che chiede all’utente di riempire una matrice, la stampa, cerca, se esiste, la prima occorrenza dello 0, l’ultima occorrenza dello 0 e l’occorrenza dello 0 in posizione mediana e dice in che posizione sono state trovate .

Esercizio

- Scrivere un programma che riempia una matrice 20x30 chiedendo all'utente di inserire gli elementi, ma inserendo nella matrice solo gli elementi pari.
- Il programma termina quando la matrice è piena.

Esercizio

- **Scrivere un programma che legge una sequenza di numeri interi e li mette nella prima riga della matrice M. La lettura della sequenza termina quando alla prima riga della matrice M sono stati assegnati 50 interi oppure quando viene letto il secondo numero intero negativo.**

Esercizio

- Scrivere un programma che chiede all’utente di inserire una matrice 20x30, poi (dopo aver terminato la fase di inserimento) copia gli elementi dispari in una seconda matrice 20x30 senza lasciare buchi, se non in fondo.
- Gli elementi in fondo (i "buchi") siano messi a zero.

Esercizio

- Scrivere un programma che chiede all'utente di inserire una matrice NxN con elementi tutti diversi. Se l'utente inserisce un numero già inserito il programma lo avvisa dell'errore e chiede nuovamente di inserire l'elemento.

Esercizio

- Si scriva un programma che chiede all'utente di riempire una matrice, un intero len (che deve essere un intero positivo maggiore di 1) e stampa OK se in m è presente almeno una sequenza orizzontale, verticale o diagonale, di lunghezza len, di elementi che crescono o diminuiscono linearmente (cioè in cui la differenza tra due elementi successivi è costante).
- Esempi di sequenze lineari:

  1 2 3 4 (lunghezza 4, differenza costante 1)
  4 3 2 1 (lunghezza 4, differenza constante -1)

  5 5 5 5 5 5 5 (lunghezza 7, differenza costante 0)
- Sono ammesse anche sequenze di lunghezza 1 (che è considerata sempre lineare)

Esercizio

- Una matrice quadrata Mat di dimensioni NxN (con N costante predefinita) è diagonalmente dominante se la somma dei valori assoluti degli elementi su ciascuna riga, escluso l'elemento sulla diagonale principale, è minore del valore assoluto dell'elemento corrispondente sulla diagonale principale.
- Scrivere un programma che chiede all’utente di inserire i valori di una matrice e stampa «Dominante» se la matrice è diagonalmente dominante, «Non dominante» altrimenti.
- Si ricorda che la funzione abs(n) restituisce il valore assoluto dell’n ricevuto come parametro.

Esercizio

- Considerata una matrice A di N x M interi, definiamo *claque* una sottomatrice 2 x 2 in cui la somma algebrica dei valori di una diagonale sia pari a quella dell'altra diagonale. In figura sono evidenziate le claque.
- Si scriva un programma che acquisisce una matrice N x M stampa il numero di claque della matrice.

4	-1	7	0	0
-4	-9	-1	0	0
2	8	16	1	4
-1	7	5	2	5

Esercizio

- Si scriva un programma che stampi sullo standard output il contenuto di un quadrato magico di dimensione n, con n dispari. Un quadrato magico di ordine n contiene i primi n numeri naturali (1, 2, 3, …., n^2) disposti in modo tale che la somma dei numeri su ogni riga, su ogni colonna e sulle due diagonali principali sia sempre la stessa.
- Es: n = 3

4 9 2	**0 0 0**	**0 0 2**	**0 0 2**	**4 0 2**	**4 0 2**	**4 0 2**	**4 0 2**	**4 0 2**	**4 9 2**
3 5 7	**0 0 0**	**0 0 0**	**3 0 0**	**3 0 0**	**3 5 0**	**3 5 0**	**3 5 7**	**3 5 7**	**3 5 7**
8 1 6	**0 1 0**	**0 1 0**	**0 1 0**	**0 1 0**	**0 1 0**	**0 1 6**	**0 1 6**	**8 1 6**	**8 1 6**

- Esiste una regola molto semplice per percorrere la matrice disponendo i numeri interi in ordine crescente. Partendo col posizionare un 1 nella posizione centrale sull'ultima riga, si percorre la matrice incrementando di una unità il numero di riga e il numero di colonna dell'elemento attuale, avendo cura di considerare i bordi opposti della matrice come adiacenti. Se durante questa operazione si individua una cella vuota si scrive il numero successivo; altrimenti, il numero successivo, viene posizionato nella cella avente riga immediatamente superiore a quella dell'ultimo numero inserito.

Prodotto di matrici

	0	1	2	3
0	**3**	**7**	**10**	**0**
1	**1**	**3**	**11**	**2**
2	**5**	**8**	**9**	**24**

*

0	1	2	3	4	
2	**1**	**0**	**4**	**3**	0
7	**9**	**6**	**1**	**2**	1
5	**1**	**2**	**5**	**0**	2
11	**0**	**3**	**8**	**7**	3

c[1][2] =∑(a[1][k]*b[k][2]),
con k = 0, ..., 3

	0	1	2	3	4
0					
1			18+ 22+6		
2					

Esercizio

- Si scriva un programma che chiede all'utente di riempire una matrice NxN (con N costante globale predefinita) di interi e stampa la lunghezza della sequenza più lunga orizzontale, verticale o diagonale di numeri uguali consecutivi.

Esempio (con matrice 5 per 5, per semplicità):

3	6	7	5	3
5	6	2	9	1
2	7	0	9	3
6	0	6	2	6
1	8	7	9	2

se len è 4, la funzione deve restituire 0, perché non c'è nessuna sequenza lineare di lunghezza 4, se len è 3, la funzione restituisce 1, perché è presente la sequenza orizzontale 7 5 3, con differenza costante -2

Esercizio

- Si realizzi un programma che, data una matrice NxM di interi, trovi l’elemento per cui la media degli elementi ad esso adiacenti sia massima. Si stampino le coordinate di tale elemento ed il suo valore.
- Si considerino come adiacenti a ciascun elemento i quattro elementi nelle quattro direzioni cardinali. Si tratti inoltre l’ultima colonna come adiacente alla prima, e l’ultima riga come adiacente alla prima. Si supponga che N ed M possano variare tra 1 e 100. I valori di N ed M, così come i valori degli elementi della matrice, vengono acquisiti da tastiera.

Esercizio

- Scrivere un programma che chiede all'utente di inserire una matrice NxN e stampa gli elementi di tale matrice secondo un ordinamento a spirale, partendo dalla cornice più esterna e procedendo verso l'interno.

Prodotto di Kronecker

- Se A una matrice m×n e B una matrice p×q, allora il loro prodotto di Kronecker A x B è una matrice mxp×nxq definita a blocchi nel modo seguente:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Cioè, esplicitando ogni termine:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\
a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\
a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq}
\end{bmatrix}$$